1 O que sabemos fazer

O **algoritmo** Simplex requer uma solução básica factível para que possa ser iniciado. Quando temos um modelo somente com restrições do tipo $\leq$, sempre é possível criar uma SBF no início.

Considere o seguinte modelo de PL:

$$\begin{aligned} \max\ z = 5x_1 + 2x_2 \\ 10x_1 + 12x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Na forma padrão, temos (min z e inserindo variáveis de folga).

$$\begin{array}{lccccl} \text{min z} = & -5x_1 & -2x_2 & & & \\ & 10x_1\ + & 12x_2\ + & x_3 & & = 60 \\ & 2x_1\ + & x_2\ + & & x_4 & = 6 \end{array}$$

Colocando os dados em forma tabular:

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	-5	-2	0	0	0
x_3	10	12	1	0	60
x_4	2	1	0	1	6

Como temos 2 restrições, a presença de uma matriz identidade ($\mathbf{I}_{2X2}$) já fornece uma solução básica factível (lembre-se de que os coef. da função objetivo também devem ser zerados nas colunas das variáveis básicas).

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	-5	-2	0	0	0
x_3	10	12	1	0	60
x_4	2	1	0	1	6

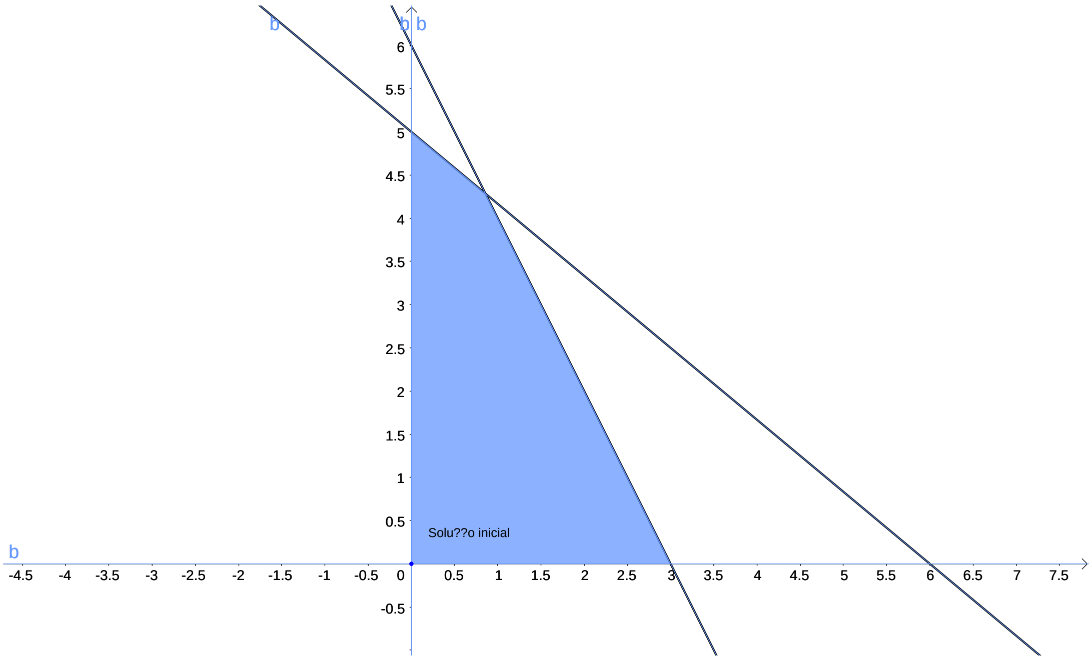
Temos a solução $x_B^T = (x_3, x_4) = (60, 6)$ e $x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)$

De forma que o sistema é **canônico**, e equivalente ao mostrado abaixo, em que a solução é trivial.

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	-5	-2	0	0	0
x_3	10	12	1	0	60
x_4	2	1	0	1	6

	x_3	x_4	-z
VB	0	0	0
x_3	1	0	60
x_4	0	1	6

Podemos ver graficamente que a solução básica $x_B^T = (x_3, x_4) = (60, 6)$ e $x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)$ é factível.



Mas o que acontece quando temos restrições do tipo ">="ou "="no modelo? Considere o modelo abaixo.

$$\begin{aligned} \max\ z = x_1 + x_2 & \\ 4x_1 + 2x_2 &\geq 20 \\ x_1 &\leq 9 \\ x_2 &\leq 11 \\ x_1, x_2 \geq 0 & \end{aligned}$$

2 O que não sabemos fazer

Na forma padrão, temos:

$$\begin{aligned} \min\ z = -x_1 + -x_2 & \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 20 \\ x_1 + x_4 &= 9 \\ x_2 + x_5 &= 11 \end{aligned} \tag{1}$$

Na forma tabular:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-1	0	0	0	0
???	4	2	-1	0	0	20
x_4	1	0	0	1	0	9
x_5	0	1	0	0	1	11

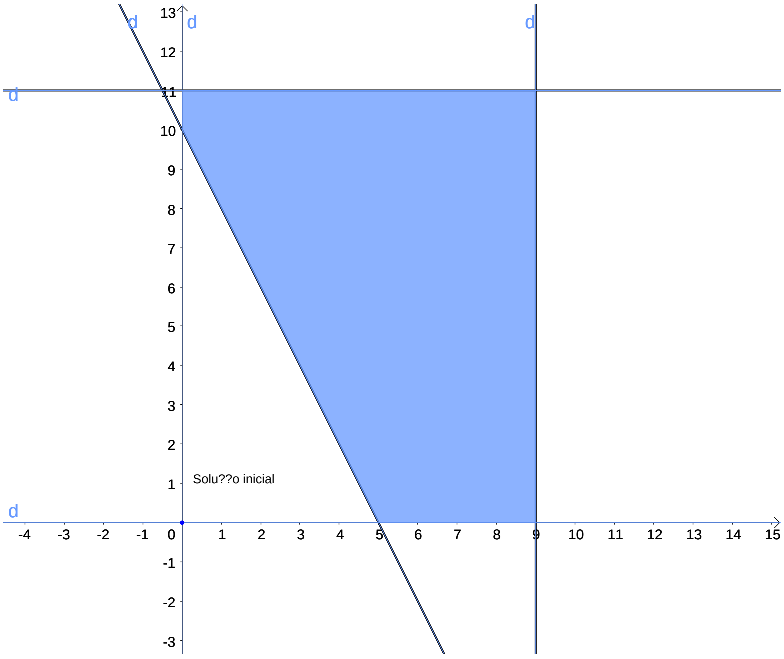
Note que com esse modelo, a sol. básica formada pelas variáveis de folgas/excessos **não é factível**, devido a negatividade de x_3 na linha 2.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-1	0	0	0	0
???	4	2	-1	0	0	20
x_4	1	0	0	1	0	9
x_5	0	1	0	0	1	11

Essa solução implicaria $x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (-20, 9, 11)$, com $x_3 < 0 \rightarrow$ **infactível**

Podemos ver graficamente que a solução básica $x_B^T = (x_3, x_4, x_5)$ e $x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)$ não está na região factível.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-1	0	0	0	0
???	4	2	-1	0	0	20
x_4	1	0	0	1	0	9
x_5	0	1	0	0	1	11



3 A solução

É por esse motivo que o **método** Simplex é composto por duas fases, chamadas **Fase I** e **Fase II**. Em ambas as fases o **algoritmo** Simplex é usado.

1. Método Simplex:
   (a) **FASE I:** Verifica se o problema tem uma SBF inicial. Se não, tenta encontrar uma (pelo algoritmo Simplex e um modelo alterado).
   (b) **FASE II:** Com uma SBF, inicia o algoritmo Simplex no modelo original.

- Existem 2 formas de operarmos a Fase I do método Simplex, a fim de encontrarmos uma SBF. O chamado **método do big-M** e o **método das variáveis artificiais.**
- Como seguimos o material do criador do Simplex (George B. Dantzig), usaremos a sua sugestão: **método das variáveis artificiais**. Porém ambos são equivalentes.

Este método insere novas variáveis no modelo para artificialmente gerar uma matriz identidade nos coeficientes da matriz. Como elas não fazem parte do sistema, uma nova função objetivo é inserida, que deve minimizar a soma destas variáveis, levando o simplex a removê-las da base.

Quando (se) isso ocorre, uma SBF é encontrada e as variáveis artificiais podem ser retiradas do sistema.

O **método das variáveis artificiais** consiste dos seguintes passos (considerando o modelo já na forma padrão):

1. Torne todo b não negativo.
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva.
$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, ..., \bar{x}_{n+m})$$
3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas:
$$\min\ w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j$$
4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica).
5. Aplique o método Simplex na tabela atual.

Ao fim da otimização do novo sistema, faça:

1. Se min $w > 0$ no fim da Fase I PARE: o problema original é infactível.
2. Preparação para a Fase II:
   (a) Se alguma variável não-básica não-artificial tem coef. > 0 na função objetivo w, elimine-as da tabela.
   (b) Elimine da tabela **todas as variáveis artificiais não básicas**.
   (c) Elimine a fo w e reinsira a função original z, realizando as operações para manter o sistema na forma canônica (deixando 0 todos os coef. da linha de z referentes as variáveis atualmente na base).
3. Aplique o Simplex Fase II utilizando a base atual.

Vamos executar o método das variáveis artificiais no problema anterior.

O modelo na forma padrão não possui nenhum $b < 0$

$$\begin{aligned}
\min\ z = -x_1 + -x_2 & \\
4x_1 + 2x_2 - x_3 \quad & = 20 \\
x_1 \quad + x_4 \quad & = 9 \\
x_2 \quad + x_5 & = 11
\end{aligned}$$

Adicionamos a cada restrição uma variável artificial.

$$\begin{aligned}
\min\ z = -x_1 + -x_2 & \\
4x_1 + 2x_2 - x3 \quad + \bar{x}_6 \quad & = 20 \\
x_1 \quad + x4 \quad + \bar{x}_7 \quad & = 9 \\
x_2 \quad + x_5 \quad + \bar{x}_8 & = 11
\end{aligned}$$

Adicionando a nova função objetivo w:

$$\begin{array}{lllllll}
\min\ w = & & & & + \bar{x}_6 + \bar{x}_7 + \bar{x}_8 & & \\
4x_1 + 2x_2 - x3 & & & & + \bar{x}_6 & & = 20 \\
x_1 & & + x4 & & & + \bar{x}_7 & = 9 \\
 & x_2 & & + x_5 & & + \bar{x}_8 & = 11
\end{array}$$

Atualizando a tabela Simplex:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	0	0	0	0	1	1	1	0
	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
	1	0	0	1	0	0	1	0	9
	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Para deixar na forma canônica em relação às variáveis artificiais $x_B^T = (\bar{x}_6, \bar{x}_7, \bar{x}_8)$ é necessário zerar os coeficientes delas na função objetivo (marcados com 1):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	0	0	0	0	1	1	1	0
	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
	1	0	0	1	0	0	1	0	9
	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Após as atualizações temos a tabela:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Com variáveis básicas $x_B^T = (\bar{x}_6, \bar{x}_7, \bar{x}_8) = (20, 9, 11)$ e não básicas $x_N^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$. De forma que podemos começar a aplicar o método Simplex.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos o elemento pivo $a_{2,1} = 4$. Realizando o pivoteamento da tabela:

1. $L_2 \leftarrow L_2/4$
2. $L_1 \leftarrow L_1 + 5L_2$
3. $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos a tabela atualizada com variáveis básicas $x_B^T = (x_1, \bar{x}_7, \bar{x}_8) = (5, 4, 11)$ e não básicas $x_N^T = (\bar{x}_6, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$.

OBS: Note que já conseguimos remover uma variável artificial da base (removemos $\bar{x}_6$ e inserimos x_1).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Selecionando min $\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -1, -1\} = -1$ com x_4 entrando na base. **OBS:** Aqui seria possível escolher outra variável para entrar na base (x_5). Teria alguma diferença?

Selecionando min $\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -1, -1\} = -1$ com x_4 entrando na base. O nosso objetivo é **remover as variáveis artificiais da base.** Selecionando tanto x_4 quanto x_5 para entrar, forçaria uma artificial a sair ($\bar{x}_7$ ou $\bar{x}_8$), de forma que podemos escolher arbitrariamente.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Selecionando min $\{\frac{4}{1}\} = 4$ com $\bar{x}_7$ saindo da base.

Temos o elemento pivo $a_{3,4} = 1$. Pivoteamento da tabela:

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$

Temos a tabela atualizada com a nova base $x_B^T = (x_1, x_4, \bar{x}_8,) = (5, 4, 11)$ e não básicas $x_N^T = (\bar{x}_6, x_2, x_3, \bar{x}_7, x_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

OBS: Note que já conseguimos remover duas variáveis artificiais da base (agora inserimos x_4).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

OBS: Novamente, aqui seria possível escolher entre x_2 e x_5. Teria alguma diferença? Nesse caso sim! Se escolhermos x_2, a variável que sairia da base é x_1 (uma não artificial). Já escolhendo x_5 quem sai é $\bar{x}_8$ (uma artificial), de forma que devemos dar preferencia a escolha de x_5.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Selecionando min $\{\frac{1}{1}\} = 1$ com $\bar{x}_8$ saindo da base.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos o elemento pivô $a_{4,5} = 1$. Pivoteamento da tabela:

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_4$

A tabela atualizada fica:

Com isso chegamos ao fim da otimização na Fase I. Agora verificamos se podemos continuar (se o problema original é factível), adaptando a tabela novamente (removendo colunas extras e trocando a função objetivo).

- Vemos que o valor $w = 0$, ou seja, o problema original é **factível**.
- Das variáveis não-artificiais, não básicas (x_2, x_3), nenhuma tem valor > 0, portanto não eliminamos nenhuma.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	0	0	0	0	1	1	1	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	0	0	1	11

- Todas as variáveis artificiais são não básicas, de forma que podemos remover todas essas colunas da tabela:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	0	0	0	0	1	1	1	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	0	0	1	11

- Ficamos com:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-w
VB	0	0	0	0	0	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	11

- Ao substituirmos novamente a função objetivo original (min $z = -x_1 - x_2$), nota-se que o sistema não se mantém na forma canônica em relação às variáveis básicas.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-1	0	0	0	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	11

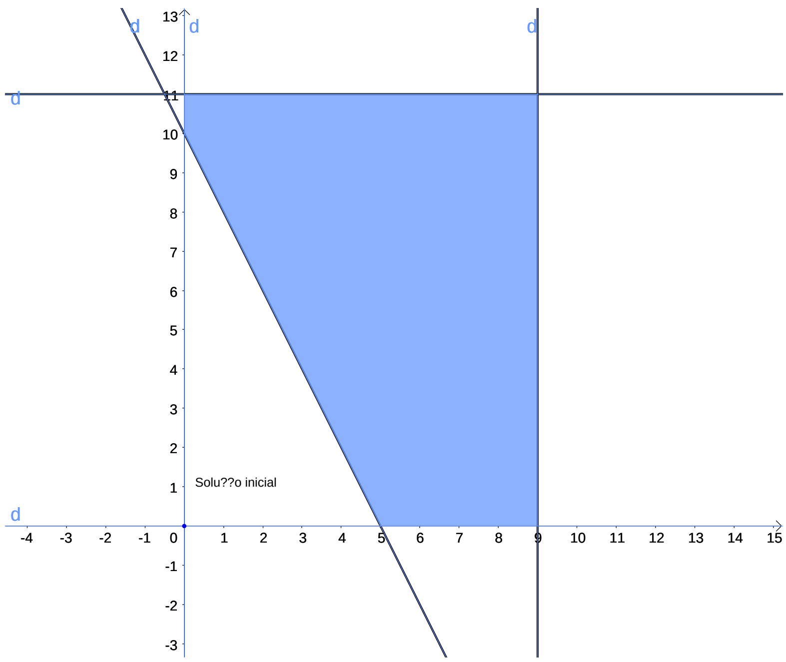
1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

A nova tabela atualizada fica:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	-1/2	-1/4	0	0	5
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	11

OBS: Note que conseguimos uma solução básica factível (**SBF**) somente com as variáveis originais.

Podemos verificar isso graficamente, com $x_B^T = (x_1, x_4, x_5) = (5, 4, 11)$



Aplicando o simplex:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	-1/2	-1/4	0	0	5
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	11

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$
2. $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$
3. $L_2 \leftarrow 2L_2$
4. $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	1	0	-1/2	0	0	10
x_2	2	1	-1/2	0	0	10
x_4	1	0	0	1	0	9
x_5	-2	0	1/2	0	1	1

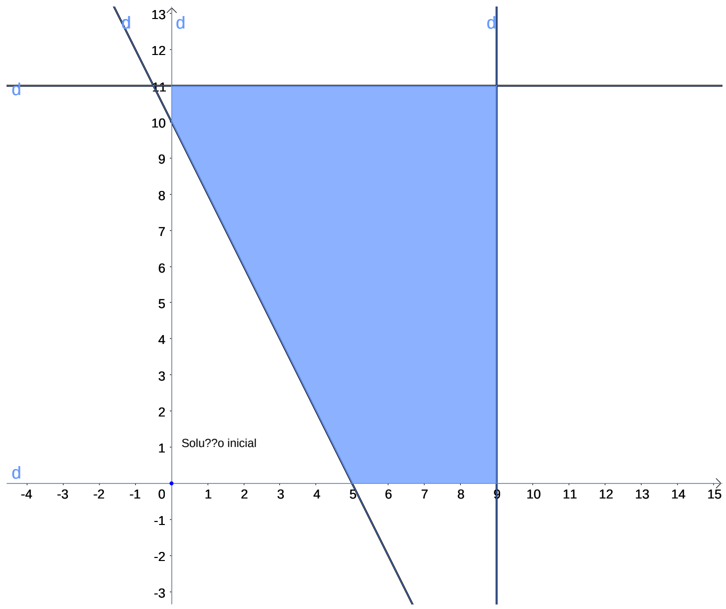
1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_4$
2. $L_2 \leftarrow L_2 + L_4$
3. $L_4 \leftarrow 2L_4$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	0	0	0	1	11
x_2	0	1	0	0	1	11
x_4	1	0	0	1	0	9
x_3	-4	0	1	0	2	2

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$
2. $L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2$

Solução ótima com $x_B^T = (x_2, x_1, x_3) = (11, 9, 38)$ e $x_N^T = (x_4, x_5) = (0, 0)$
Podemos verificar isso graficamente, com $x_B^T = (x_2, x_1, x_3) = (11, 9, 38)$ e $x_N^T = (x_4, x_5) = (0, 0)$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	0	1	1	20
x_2	0	1	0	0	1	11
x_1	1	0	0	1	0	9
x_3	0	0	1	4	2	38



4 Conclusões

1. Quando temos um modelo com restrições do tipo $\geq$ ou $=$ não conseguimos uma solução básica factível (SBF) de forma automática (não existe uma submatriz identidade em $\mathbf{A}$).
2. Nesses casos precisamos de um método para primeiro encontrar uma SBF, e somente em seguida aplicar o algoritmo Simplex no modelo original.
3. Essa busca por uma SBF é chamada **Fase I** do **Método Simplex**. Existem duas técnicas para aplicar a Fase I: método do Big-M e **método das variáveis artificiais** (o que usamos).
4. Após o fim da Fase 1 existem duas possibilidades:
   (a) $w > 0 \rightarrow$ problema original **infactível**.
   (b) $w = 0 \rightarrow$ problema original **factível**, base atual é factível para o problema original.